XIX secolo

Carl Friedrich Gauss

Questo secolo è spesso chiamato *L'età dell'oro della matematica*.

Durante il XIX secolo nacquero i primi periodici matematici come il Journal di Crelle e il Journal di Liouville. I matematici iniziarono a riunirsi nelle facoltà universitarie.

Nacquero le prime società matematiche, come la London Mathematical Society.

Fu confermato il primato di Parigi grazie a una geniale generazione di matematici, ma nella seconda parte del secolo il centro più importante per gli studi matematici divenne Gottinga dove risiedevano matematici come Gauss, Riemann e Dirichlet.

Algebra

L'algebra ricevette nei primi anni del XIX secolo un grande impulso: Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fu il primo a dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra nel 1799. Nella sua dimostrazione introdusse il piano complesso che avrebbe avuto un'importanza fondamentale nello sviluppo dell'analisi complessa. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Carl Jacobi (1804-1851) chiarirono il concetto di determinante di una matrice e dimostrarono importanti teoremi di algebra lineare. Jacobi introdusse poi il concetto di matrice jacobiana.

Evariste Galois (1811-1832) e Niels Abel (1802-1829), entrambi morti giovanissimi, studiarono la risolubilità delle equazioni di grado superiore al quarto. Abel dimostrò il teorema di Abel-Ruffini che stabilisce l'impossibilità di risolvere per radicali le equazioni di quinto grado. Galois invece stabilì la non risolubilità per radicali delle equazioni di grado superiore al quinto e il suo lavoro è all'origine della teoria di Galois, importante branca dell'algebra astratta.

Analisi

L'analisi matematica fu invece posta su basi sempre più ben definite. Cauchy definì rigorosamente il concetto di derivata come limite del rapporto incrementale tra la funzione e la variabile e quello di funzione continua. Chiarì anche il concetto di limite anche se Karl Weierstrass formalizzò meglio la sua definizione. Bernhard Riemann chiarì invece il concetto di integrale (integrale di Riemann). Bernhard Bolzano aveva sviluppato molte di queste definizioni precedentemente, ma la sua opera restò purtroppo sconosciuta per decenni.

Grazie a questi passi avanti, Cauchy riuscì a estendere i concetti del calcolo infinitesimale alle funzioni a variabile complessa scoprendo il teorema integrale e la formula integrale di Cauchy. Scoprì anche il criterio di convergenza di Cauchy.

Oltre ai già menzionati contributi all'algebra lineare Cauchy si occupò anche di statistica (variabile casuale di Cauchy), meccanica e soprattutto teoria dei numeri. Arrivò vicino a dimostrare l'ultimo teorema di Fermat.

Partendo da un precedente lavoro di Abel, Jacobi diede importanti contributi alla comprensione degli integrali ellittici scoprendo la doppia periodicità di alcuni di essi e introducendo le funzioni ellittiche jacobiane. Joseph Fourier invece studiò il movimento ondulatorio e il calore. Introdusse poi le serie di Fourier e la trasformata di Fourier.

Teoria dei Numeri

Carl Gauss fu senza dubbio uno dei matematici più importanti del secolo e di tutti i tempi. Visse buona parte della sua vita a Gottinga che divenne ben presto uno dei centri più importanti della matematica europea. Ricercò in quasi tutte le branche della matematica. Dopo aver dimostrato il teorema fondamentale dell'algebra, si occupò soprattutto di teoria dei numeri pubblicando nel 1801 le *Disquisitiones Aritmeticae*. La teoria dei numeri vide in questo secolo l'introduzione di nuovi concetti sempre più legati ai metodi analitici.

Nelle *Disquisitiones* Gauss introduceva il l'aritmetica modulare che avrebbe facilitato moltissimo la scrittura e la comprensione di teoremi relativi a questo campo d'indagine. Sempre in questo volume introduceva il concetto di intero gaussiano. Congetturò poi indipendentemente da Legendre il metodo dei minimi quadrati e il teorema dei numeri primi che mette in relazione la distribuzione di questi con la funzione logaritmica. Il teorema sarà dimostrato solo nel 1894 da Jacques Hadamard e Charles de La Vallée-Poussin. Gauss fu anche un grande statistico. La variabile casuale normale che descrive la distribuzione degli errori è dovuta a lui.

Alla morte di Gauss, Peter Gustav Dirichlet (1805-1859) gli successe nel suo posto di insegnante. Egli dimostrò il teorema secondo il quale in tutte le progressioni aritmetiche si trovano infiniti numeri primi, (teorema di Dirichlet) usando complessi metodi analitici. Introdusse anche la convoluzione di Dirichlet.

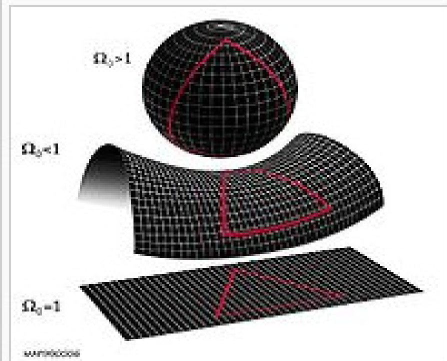
Il lavoro più importante nella teoria dei numeri fu però quello di Bernhard Riemann (1826-1866), il successore di Dirichlet a Gottinga che in un articolo del 1859 introdusse formalmente la funzione zeta di Riemann. Egli capì il collegamento di questa con la distribuzione dei numeri primi e studiando i valori complessi della funzione zeta congetturò che tutti i suoi zeri complessi avessero parte reale un mezzo. Questa congettura nota come ipotesi di Riemann non è ancora stata risolta; se lo fosse, potrebbero essere dimostrati moltissimi teoremi, tra cui una formula che approssima la distribuzione dei numeri primi nella maniera migliore possibile.

Joseph Liouville dimostrò nel 1844 l'esistenza di numeri trascendenti costruendo appositamente alcuni esempi come la costante di Liouville. Successivamente Charles Hermite dimostrò la trascendenza di e e Ferdinand von Lindemann quella di π. Grazie a queste ed altre scoperte si dimostrò la non risolubilità con riga e compasso dei tre problemi classici dell'antica Grecia.

Geometria

Nel XIX secolo la geometria, dopo un secolo in cui non aveva fatto praticamente progressi, ritornò ad essere una materia importante di studio. Gauss trovò le condizioni per cui un poligono regolare poteva essere costruito usando solo riga e compasso, risolvendo un problema che restava aperto da millenni. Sempre Gauss diede inizio ad una nuova branca della geometria, la geometria differenziale, introducendo il concetto di curvatura di una superficie.

Jakob Steiner (1796-1863) dimostrò che tutte le figure costruibili usando riga e compasso possono essere costruite usando solo la riga e una circonferenza iniziale. Abbozzò poi la prima dimostrazione del problema isoperimetrico che sarebbe stata completata da altri. Julius Plucker introdusse il metodo delle notazioni geometriche abbreviate e dimostrò il principio di dualità. Studiò la possibilità di una geometria a quattro o più dimensioni spaziali. Insieme ad August Ferdinand Möbius introdusse le coordinate omogenee. Moebius introdusse poi la funzione di Moebius e studiò la topologia (nastro di Moebius).



Schema delle principali geometrie: ellittica, iperbolica ed euclidea

Ma l'innovazione più importante del secolo in geometria furono le geometrie non euclidee. Gauss, cercando di dimostrare il V postulato di Euclide, arrivò alla rivoluzionaria conclusione che potevano esistere geometrie indipendenti dal postulato e iniziò a studiare la geometria iperbolica. Janos Bolyai arrivò alla stessa conclusione. Tuttavia il vero sviluppatore della geometria iperbolica fu il russo Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856). In questa geometria per un punto passano infinite rette che non incontrano una retta data, e la somma degli angoli di un triangolo è sempre inferiore a 180º.

Il già menzionato Riemann diede un contributo fondamentale allo studio delle geometrie non euclidee definendo il concetto di linea retta come di geodetica di uno spazio. Studiò poi la geometria costruita sulla superficie di una sfera; la geometria ellittica o riemanniana. In questa geometria non esistono rette parallele, in quanto una retta è un cerchio massimo, e la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre superiore a 180º. Riemann si occupò anche di topologia introducendo le superfici di Riemann. Anticipò il concetto di metrica e di tensore. Einstein usò i suoi risultati per descrivere lo spazio della relatività generale.

Il concetto rivoluzionario che stava alla base di queste geometrie faticò molto ad essere accettato. Henri Poincaré (1854-1912), Felix Klein(1849-1925) e Eugenio Beltrami dimostrarono la coerenza e l'indipendenza dal V postulato di queste geometrie, sancendo così la loro accettazione. Inoltre scoprirono il disco di Poincaré e la pseudosfera, due modelli fisici di geometria iperbolica. Poincaré fu anche l'inventore di quella importante branca della topologia nota come topologia algebrica. È perciò spesso considerato come il padre della topologia moderna. Si occupò di quasi tutte le branche della matematica dell'epoca apportando numerosi sviluppi. Scoprì le funzioni fuchsiane. Formulò poi la famosa congettura di Poincaré e introdusse l'attrattore strano ponendosi così tra i precursori della teoria del caos. Si occupò anche di meccanica.

Felix Klein invece introdusse il concetto algebrico di gruppo in geometria ottenendo definizioni molto generali. Scoprì anche la famosa superficie topologica nota come bottiglia di Klein.

Algebra astratta

Verso la meta del XIX secolo nacque l'algebra astratta. Galois fu precursore in questo campo introducendo i concetti di gruppo e di permutazione. La teoria dei gruppi anticipata già da lavori di Lagrange e Cauchy ma soprattutto di Abel (gruppo abeliano). Galois fu il primo a collegarla con la teoria dei campi nei suoi lavori sulla risolubilità delle equazioni. Questi lavori vennero poi formalizzati e sviluppati da Leopold Kronecker.

Le nuove teorie algebriche ricevettero attenzione in Inghilterra dove da più di un secolo la matematica era caduta in una fase di torpore. L'irlandese William Rowan Hamilton (1805-1865), volendo estendere alla terza dimensione il piano di Gauss, introdusse i quaternioni, creando così un'algebra del tutto nuova dove non valevano tutte le regole di quella ordinaria, venendo a mancare la proprietà commutativa della moltiplicazione. Hamilton introdusse anche l'operatore hamiltoniano e dimostrò il teorema di Cayley-Hamilton. Arthur Cayley studiò invece l'algebra delle matrici definendo i concetti di moltiplicazione e somma su questi enti. Studiò l'algebra degli ottetti chiamata spesso anche algebra di Cayley.

George Boole (1815-1864), infine, definì le operazioni algebriche per gli insiemi, dando inizio così alla cosiddetta algebra di Boole. Questa teoria avrebbe avuto un'importanza fondamentale nello sviluppo della logica matematica, di cui Boole può benissimo essere considerato il padre, e della teoria dell'informazione.

Logica, Teoria degli insiemi

Nella seconda metà del secolo si incominciò a studiare il concetto di numero, cercando di definirlo logicamente. Weiestrass e Richard Dedekind definirono il concetto di numero reale partendo da quello di numero naturale e di numero razionale. Il logico Gottlob Frege (1848-1925) cercò di definire il concetto di numero naturale su basi logiche, riconducendo così l'intera matematica alla logica. Tuttavia la sua definizione che si basava sul concetto di cardinalità di un insieme fu messa in crisi all'inizio del secolo successivo. Giuseppe Peano (1858-1932) tentò invece di basare la matematica in modo assiomatico. Introdusse quindi cinque assiomi che descrivevano il concetto di numero naturale spesso chiamati assiomi di Peano. Anche questo tentativo era però destinato a fallire.

Dedekind definì per primo l'infinità di un insieme come il fatto che un suo sottoinsieme potesse essere messo in corrispondenza biunivoca con esso. Partendo da questo lavoro Georg Cantor (1845-1918) iniziò a studiare gli insiemi infiniti, scoprendo che i numeri interi sono tanti quanti i numeri razionali (ossia i due insiemi hanno la stessa potenza) ma che l'insieme infinito dei numeri reali è più grande di quello dei razionali. Congetturò poi che non vi fossero altre potenzialità di infinito tra questi due insiemi. La congettura è chiamata ipotesi del continuo. Queste scoperte paradossali generarono scetticismo nella comunità dei matematici ma le idee di Cantor sono alla base della moderna teoria degli insiemi.