XX secolo

Prima del ventesimo secolo, il numero di matematici creativi attivi contemporaneamente nel mondo era inferiore al centinaio. I matematici erano di norma benestanti o supportati da ricchi possidenti.

Vi erano pochi impieghi possibili, quali insegnare nelle università o nelle scuole superiori. La professione del matematico divenne realtà solo nel ventesimo secolo. I matematici iniziarono a lavorare in gruppo. Il centro dell'attività matematica nella prima metà del secolo fu Gottinga per poi divenire negli anni '50 Princeton.

Furono istituiti vari premi matematici, a partire dalla medaglia Fields (1936) e il premio Wolf per la matematica (1978), mentre manca il premio Nobel per la matematica.

David Hilbert

In questo secolo si vide una moltiplicazione di teoremi e scoperte matematiche.

Per stabilire delle linee guida, David Hilbert (1862-1947) in un congresso del 1900 enunciò 23 problemi che avrebbero dovuto fare da guida nella matematica novecentesca. Molti di questi problemi sono stati risolti, positivamente o negativamente, ma restano aperti l'ottavo e il dodicesimo. Hilbert fu un matematico di prim'ordine. Dimostrò il teorema di finitezza e studiò le equazioni integrali introducendo gli spazi di Hilbert. La sua opera più importante fu comunque un'assiomatizzazione completa e rigorosa della geometria ottenuta nel suo Grundlagen der Geometrie.

Teoria degli insiemi

Nel 1901 invece Bertrand Russell (1872-1970) espose, in una lettera a Frege, il così detto paradosso di Russell che metteva in discussione la sua formulazione della teoria degli insiemi e dunque della matematica. Questa scoperta portò Ernst Zermelo e Adolf Fraenkel a riformulare la teoria su base assiomatiche: il cosiddetto sistema di assiomi di Zermelo-Fraenkel. Solitamente a questi viene aggiunto anche l'assioma della scelta senza il quale non si possono dimostrare alcuni importanti teoremi (il sistema risultante è solitamente chiamato ZFC). L'indipendenza di questo assioma dal sistema di Zermelo-Fraenkel è stata provata da Paul Cohen nel 1963. Anche Russell cercò parallelamente di rifondare la matematica su degli assiomi. Insieme a Alfred North Whitehead scrisse il monumentale Principia Mathematica. Il "fallimento" di queste impostazioni assiomatiche (inclusa quella tentata da Giuseppe Peano) fu decretato nel 1931 da Kurt Gödel (1906-1978) con il suo famoso teorema di incompletezza di Gödel secondo il quale in ogni sistema assiomatico coerente esistono proposizioni indecidibili (che non possono essere né dimostrate né confutate). Lo sgomento causato dal teorema aumentò quando Gödel e Cohen dimostrarono che l'ipotesi del continuo è indipendente dal sistema di assiomi di Zermelo-Fraenkel.

Analisi

In analisi Henri Lebesgue riformulò nel 1902 il concetto di integrale introducendo la misura di Lebesgue (integrale di Lebesgue). Ciò comporta un ampliamento della classe delle funzioni integrabili rispetto alla definizione data da Riemann. Furono poi introdotte funzioni improprie come la funzione gradino di Heaviside e la funzione delta di Dirac. Tramite il concetto di distribuzione Laurent Schwartz estese il concetto di derivata alle funzioni integrabili secondo Lebesgue. Abraham Robinson definì i numeri iperreali, estensione di quelli reali con cui diede vita alla cosiddetta Analisi non standard che recupera, definendoli in modo rigoroso, molti dei concetti intuitivi usati da Leibniz come quello di infinitesimo. Successivamente furono introdotti i numeri surreali.

Algebra

Ernst Steinitz apportò importanti contributi all'algebra e allo studio dei campi. Ciò portò a una classificazione dei campi algebricamente chiusi. La classificazione dei gruppi semplici finiti fu invece più difficoltosa. Daniel Gorenstein annunciò il programma per la loro classificazione nel 1972. Questa tenne impegnati un centinaio di matematici, tra cui John Conway (1937-), fino al 1985, anno in cui fu completata. Durante questa classificazione fu anche trovato il "Mostro", un gruppo semplice costituito da circa 10^{53} elementi. Si è scoperto poi che le strutture algebriche hanno molta importanza nella fisica delle particelle.

Topologia

Uno dei campi di studio principali del secolo fu la topologia. Nel 1910 Luitzen Brouwer dimostrò l'importante teorema del punto fisso. Si iniziarono a studiare le superfici minime ottenendo risultati importanti come la risoluzione del problema di Plateau. In topologia differenziale, John Milnor scoprì che una varietà topologica può ammettere più strutture differenti come varietà differenziale. Stephen Smale risolse la congettura di Poincarè per tutte le dimensioni superiori a 5. La dimostrazione fu quindi estesa in dimensione 5, e in dimensione 4 da Michael Freedman all'inizio degli anni 80.

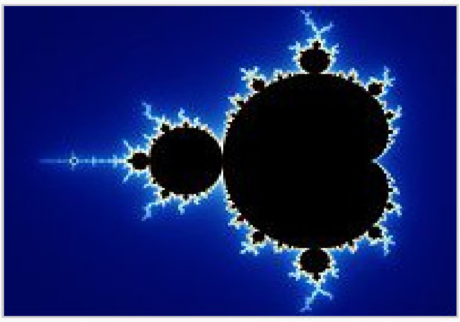
Nello stesso periodo William Thurston introdusse nuove prospettive geometriche nello studio delle varietà tridimensionali, culminanti nella Congettura di geometrizzazione. Nel ventesimo secolo ci si interessò anche alla Teoria dei nodi, e si cercò di classificarli introducendo nuovi invarianti.

Teoria dei numeri

Anche la teoria dei numeri ricevette un grande impulso. Srinivasa Ramanujan (1887-1920) dimostrò molti importanti teoremi e formule. Tra queste molte che consentono di calcolare pi e la funzione di partizione. Introdusse la funzione mock theta. Aleksander Gelfond dimostrò il teorema di Gelfond, risolvendo parzialmente la congettura sui numeri trascendenti contenuta nel settimo problema di Hilbert. Atle Selberg (1917-2007) e Paul Erdös (1913-1996) dettero nel 1949 una dimostrazione elementare del teorema dei numeri primi. Erdös fu un matematico molto prolifico. Operò soprattutto in teoria dei numeri, calcolo combinatorio e teoria dei grafi ottenendo risultati importanti. In suo onore i matematici hanno definito il numero di Erdös. Nel 1994, dopo anni di lavoro, Andrew Wiles dimostrò l'Ultimo teorema di Fermat. la sua dimostrazione usa molte tecniche di algebra moderna.

Alcuni di questi strumenti erano stati oggetto di lavoro di André Weil, un matematico che si era interessato di equazioni diofantine, curve ellittiche e gruppi di Lie.

Geometria *[modifica]*


Il frattale di Mandelbrot

In geometria, dopo la classificazione dei 230 gruppi di simmetria spaziali e dei 7 lineari, furono classificati i 17 tipi di simmetrie planari e si iniziò a studiare le tassellature. Roger Penrose scoprì la tassellatura di Penrose che copre il piano in modo aperiodico. Alain Connes sviluppò la geometria non commutativa. Due importanti congetture sono state risolte usando in modo massiccio il computer: la congettura di Keplero (1998) riguardante gli impacchettamenti sferici e il Teorema dei quattro colori (1976) secondo il quale ogni mappa più essere colorata senza che due regioni abbiano lo stesso colore usando soltanto 4 colori.

L'uso del computer è stato fondamentale nello studio dei frattali, curve dotate di area finita e perimetro infinito che non hanno dimensione intera. Questo studio, iniziato all'inizio del secolo da Gaston Julia (insieme di Julia) e Helge von Koch (curva di Koch) e incagliatosi per le difficoltà di calcolo fu ripreso da Benoit Mandelbrot (1924-) negli anni '80. Si deve a Mandelbrot la definizione degli oggetti frattali, fra questi il famoso insieme di Mandelbrot, oltre alle applicazioni in vari campi, fra cui l'economia.

Informatica

Alan Turing (1912-1954), considerato uno dei padri dell'informatica, introdusse idee fondamentali per il successivo nascere di questa materia. Introdusse i concetti di macchina di Turing e Test di Turing.

I suoi lavori sono alla base dell'Intelligenza artificiale. Durante la Seconda guerra mondiale aiutò gli alleati a decifrare i messaggi in codice nazisti. Dopo la guerra, in quanto omosessuale, fu costretto a subire una cura ormonale che lo portò al suicidio.

John von Neumann (1903-1957), una figura dominante nella matematica novecentesca, invece introdusse l'importante concetto di architettura di von Neumann e studiò la possibilità di una macchina autoreplicante. Successivamente George Dantzig introdusse il metodo di programmazione lineare chiamato metodo del simplesso. Claude Shannon sviluppò la teoria dell'informazione.

Grazie alla sua analisi del gioco degli scacchi oggi i computer possono vincere giocando a scacchi con dei campioni.

Teoria dei giochi ed economia

A Von Neumann, ed in buona parte anche a Morgenstern, si deve anche lo sviluppo della teoria dei giochi.
La teoria dei giochi si occupa della modellizzazione di una situazione di interazione strategica ed analizza quali possano essere le strategie migliori da utilizzare.
Tra i più importanti lavori di von Neumann in questo campo c'è la dimostrazione del teorema di minimax.
Successivamente John Nash (1928-) introdusse il concetto fondamentale di equilibrio di Nash, importante anche in economia.
Strettamente connessa alla teoria dei giochi è la trattazione matematica dell'economia già iniziata negli ultimi anni del secolo precedente.

John von Neumann

Nel secondo dopoguerra vi è stato uno straordinario sviluppo dei metodi matematico-formali in economia, in particolare utilizzando la teoria dei giochi: fra i risultati più significativi, il teorema di esistenza dell'equilibrio economico generale, dimostrato da Kenneth Arrow e Gerard Debreu.

Andrey Nikolaevich Kolmogorov riuscì, facendo ricorso alla misura di Lebesgue, ad assiomatizzare il calcolo delle probabilità. Von Neumann invece assiomatizzò la meccanica quantistica. Nel ventesimo secolo si iniziò ad analizzare matematicamente la struttura del linguaggio. Axel Thue definì in termini matematici il concetto di grammatica. Noam Chomsky classificò invece i vari tipi di linguaggi in base al tipo di produzioni grammaticali permesse.

Edward Norton Lorenz, studiando metodi per la previsione del tempo atmosferico, scoprì il cosiddetto attrattore di Lorenz, dando così inizio alla teoria del caos. Questa studia i sistemi caotici, quei sistemi, cioè, in cui piccole variazioni delle condizioni iniziali portano a variazioni consistenti nel tempo. La teoria ha importanti applicazioni nella meteorologia.

Filosofia matematica

Nel novecento si crearono due scuole di pensiero opposte riguardo al significato della matematica. I realisti (Kurt Gödel) credono che le entità matematiche in qualche modo *esistano* e che le verità matematiche siano verità assolute. Invece i formalisti (David Hilbert) credono che gli enunciati matematici siano in realtà conseguenze di alcuni assiomi e regole deduttive e che gli enunciati matematici non abbiano una validità assoluta ma limitata al sistema preso in considerazione.

Si crearono poi le scuole di pensiero costruttivista e intuizionista.

Queste correnti di pensiero rigettano alcuni principi matematici come il principio del terzo escluso e l'infinito attuale (e di conseguenza tutti gli algoritmi infiniti). L'intuizionismo, sviluppato da Luitzen Brouwer, in particolare sostiene che i principi fondamentali della matematica siano nella intuizione individuale e nella mente del matematico.

L'Ultimo Teorema di Fermat

L'edizione del 1670 dell'*Aritmetica* di Diofanto, corredata con le annotazioni di Fermat. È qui visibile l'enunciato originale della congettura.

> **«** È impossibile separare un cubo in due cubi, o una potenza quarta in due potenze quarte, o in generale, tutte le potenze maggiori di due come somma della stessa potenza. Dispongo di una meravigliosa dimostrazione di questo teorema, che non può essere contenuta nel margine troppo stretto della pagina **»**
>
> (Pierre Fermat)


Arithmeticorum Liber II. 61

IN QVAESTIONEM VII.

QVAESTIO VIII.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

QVAESTIO IX.

L'edizione del 1670 dell'*Aritmetica* di Diofanto, corredata con le annotazioni di Fermat. È qui visibile l'enunciato originale della congettura.

E' con queste parole che Pierre Fermat enuncia, nel margine ("troppo stretto" appunto) dell'*Aritmetica* di Diofanto quello che diverrà noto come Ultimo teorema di Fermat. L'enunciato, estremamente semplice, afferma che l'equazione

$$x^n + y^n = z^n$$

non ha soluzioni intere per $n>2$. In altre parole mentre per n=2 è possibile trovare triplette di numeri (chiamate terne pitagoriche) che soddisfano l'equazione, come $3^2 + 4^2 = 5^2$, non è possibile trovare numeri interi che soddisfino la formula per n=3,4,5...

Della dimostrazione di Fermat, non c'è traccia.
Tra le sue carte è stata trovata solo una dimostrazione per n=4 (nella quale, tra l'altro, viene introdotto il metodo della discesa infinita). In realtà Fermat dimostrò che un triangolo rettangolo con lati interi, non più avere area equivalente a un quadrato perfetto ma questo enunciato è equivalente a $z^4 - y^4 = x^2$ che è facilmente riconducibile al teorema per n=4.

È da notare che basta dimostrare il teorema per *n* primo in quanto le potenze composte possono essere facilmente ricondotte a tale caso.

I primi tentavi di dimostrare il teorema si hanno nel VIII secolo con Eulero che tuttavia riesce a dimostrare solo il caso in cui n=3. La matematica Sophie Germain scoprì che il teorema era probabilmente vero per tutti i numeri primi di Sophie Germain, cioè tutti i numeri primi *p* tali che anche *2p+1* è primo. Sfruttando le linee guida della sua dimostrazione, Adrien-Marie Legendre dimostrò il teorema per n=5 e Gabriel Lamé per n=7. Nel 1847, Cauchy e lo stesso Lamé annunciarono indipendentemente di essere in procinto di dimostrare il teorema generale.

Tuttavia la competizione fu interrotta da Ernst Kummer che faceva notare come le dimostrazioni poggiassero entrambe sull'ipotesi dell'unicità della scomposizione in fattori, vera in campo reale ma non in campo complesso. La dimostrazione era comunque valida per gli esponenti primi minori di 31 e per altri valori, tra cui *n=59* e *n=67*.

La dimostrazione arrivò inaspettatamente tre secoli dopo la formulazione della congettura, nel 1993 ad opera del matematico Andrew Wiles. La scoperta di una lacuna e la sua correzione l'anno seguente conclusero la secolare vicenda. La dimostrazione di Wiles utilizza concetti molto tecnici della matematica moderna come le curve ellittiche ed è impossibile che possa essere stata pensata da Fermat. Resta il dubbio su quale fosse la sua "meravigliosa dimostrazione".

L'ultimo teorema di Fermat è entrato a far parte della cultura popolare: per esempio nell'episodio della famosa serie animata *I Simpson Homer 3D* (ne La paura fa novanta VI), andato in onda poco dopo la pubblicazione della dimostrazione di Wiles, il protagonista Homer Simpson finisce in uno strano mondo multidimensionale dove appaiono brevemente l'identità di Eulero la formulazione de problema P=NP e, soprattutto, un'apparente controesempio al teorema di Fermat: $1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}$. La formula se verificata su di una normale calcolatrice scientifica sembra vera ma si tratta di un errore dovuto all'approssimazione. Quando fu fatto notare che l'equazione era banalmente confutata dal fatto che il primo membro risultasse pari e il secondo dispari fu mandato in onda l'episodio *Lo stregone di Evergreen terrace* nel quale compare per pochi secondi una formula analoga: $3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}$ che non presenta tale inconveniente. Sulla stessa lavagna si nota un toro che viene trasformato topologicamente in una sfera: in realtà l'operazione è impossibile ma viene giustificata tramite dei "morsi"; chiaro riferimento ironico alla passione del protagonista per le ciambelle.