

# Relazione sull'attività di ricerca svolta nel periodo dal 16/01/2011 al 30/09/2011

Marco Compagnoni

2 ottobre 2011

## 1 Introduzione

La ricerca svolta nel periodo gennaio-settembre 2011 é composta dalle seguenti attività:

1. Analisi dello stato dell'arte, in particolare del lavoro svolto nel biennio 2004-2006 dal gruppo coordinato dal Prof. Giovanni Frosoli del Dipartimento di Matematica Applicata dell'Università di Firenze. Nella sezione 2 presentiamo una rivisitazione critica di questo lavoro.
2. Fase preliminare di studio della letteratura, delle tecniche e degli algoritmi esistenti nel campo dell'elaborazione di immagini digitali.
3. Lavoro di consulenza nelle acquisizioni manuali delle immagini di prova, in particolare per quanto riguarda la calibrazione dei parametri di acquisizione.
4. Scelta e sviluppo degli algoritmi per l'effettiva elaborazione delle immagini di prova a disposizione. Nella sezione 3 descriveremo in dettaglio i risultati conseguiti.
5. Prima individuazione delle tecniche statistiche e degli algoritmi di classificazione. Nella sezione 4 concluderemo presentando i possibili approcci al momento ipotizzati al problema e definendo lo schema delle successive fasi del lavoro.

## 2 Analisi dello stato dell'arte

Il processo di classificazione automatica proposto in [1] prevede quattro fasi distinte:

1. preparazione delle immagini;
2. misura dei parametri significativi;
3. analisi ed elaborazione dei dati;
4. classificazione della fibra.

Vediamo brevemente in dettaglio ogni singolo punto.

### 2.1 Fase di preparazione delle immagini

La fase di preparazione delle immagini viene effettuata in tre passaggi successivi.

1. Viene individuato il bordo della fibra e annerita la parte del fotogramma complementare alla fibra stessa. Successivamente vengono individuati in bianco i contorni interni ed esterni delle scaglie.
2. Taglio dell'immagine: l'immagine iniziale della fibra interseca i lati del fotogramma in modo casuale. Per evitare effetti di bordo nelle successive analisi, essa viene tagliata trasversalmente al suo asse ad entrambi i suoi estremi.
3. Determinazione dell'asse della fibra: l'asse viene individuato come la migliore parabola interpolatrice (nel senso dei minimi quadrati) dei pixel bianchi della fibra. Si ottiene l'espressione analitica di questa curva e si ricava la terna intrinseca in ogni suo punto, necessaria per la successiva estrazione dei parametri.

È importante sottolineare che tutti i dettagli tecnici di ogni singolo passaggio non vengono mai forniti esplicitamente. Questi sono invece fondamentali per capire la bontà e la robustezza della procedura.

### 2.2 Fase di misura dei parametri

Sulle immagini in bianco e nero delle fibre vengono rilevati quattro diversi tipi di dati, arrivando a definire una serie di parametri.

- Lunghezza della fibra: si definisce la lunghezza della fibra come il numero di pixel lungo l'asse. Questa misura in realtà non tiene conto della differenza di distanza tra pixel vicini lungo le direzioni orizzontali e verticali e quelli lungo le diagonali.
- Funzione densità di pixel bianchi: si misura il numero di pixel bianchi lungo la direzione perpendicolare ad ogni punto dell'asse.

- Funzione diametro: si definisce in ogni punto dell'asse una misura regolarizzata del diametro, ottenuta come il doppio della distanza minima tra il pixel dell'asse ed il bordo superiore ed inferiore della fibra. Il diametro così definito tende a sottostimare il diametro effettivo della fibra; non è chiaro inoltre se questa procedura renda realmente più robusta la misura.
- Misure sulle scaglie: scorrendo l'asse della fibra si memorizzano le distanze tra due pixel bianchi successivi. Si definiscono:
  - il numero di scaglie  $NSC$  come il numero di distanze aventi valore assoluto superiore ad una soglia fissata  $d_S$  (non meglio specificata);
  - il massimo spessore di una scaglia  $MSC$  come il valore massimo tra le distanze aventi valore assoluto inferiore alla soglia  $d_S$ ;
  - lo spessore medio di una scaglia  $SSC$  come la media tra le distanze aventi valore assoluto inferiore alla soglia  $d_S$ .

Essendo le distanze valutate esclusivamente lungo l'asse della fibra, tali misure appaiono decisamente poco robuste.

Anche per questa fase non viene fornita alcuna informazione tecnica dettagliata sull'estrazione dei parametri.

## 2.3 Fase di analisi ed elaborazione dei dati

La discriminazione della tipologia di fibra non avviene direttamente sui parametri misurati, ma è invece preceduta da una analisi ed elaborazione degli stessi, eseguite in tre passaggi successivi.

1. Sono stati definiti molti parametri derivati da quelli misurati (oltre 50), alcuni ottenuti come combinazioni degli stessi, la maggior parte ricavati tramite analisi statistica. Tutti i parametri sono direttamente correlati alla classificazione in classe lana.
2. Sui nuovi parametri è stata effettuata l'analisi delle componenti principali, allo scopo di ridurli in numero ed ottenere solo parametri linearmente scorrelati e significativi.
3. Si sono studiate le distribuzioni statistiche che avrebbero potuto meglio descrivere i dati campioni. Si è valutato che i parametri valutati sui campioni di lana sono meglio interpolati da distribuzioni di tipo gamma, mentre quelli relativi ai campioni di cashmire sono meglio interpolati da distribuzioni di tipo lognormale. Presumibilmente al fine di semplificare la classificazione, è stato infine deciso di utilizzare sempre la distribuzione lognormale e di definire quindi come parametri ultimi i logaritmi dei parametri del punto precedente.

Gli indicatori definiti nel terzo punto sono quelli su cui interviene l'ultima fase della classificazione.

## 2.4 Fase di classificazione della fibra

La classificazione di una fibra avviene in base a quanto i parametri definiti nelle fasi precedenti e misurati sulla stessa si discostano dai valori di riferimento ottenuti sui campioni. Tale procedura si completa in tre passi.

1. Si sono individuati tre parametri molto significativi: il valore medio del diametro, l'inverso della lunghezza media di scaglia ed il prodotto di questi. Viene valutato se essi si discostano di oltre tre deviazioni standard dal relativo valore medio attribuito ad ogni singola classe di fibre. La classificazione termina nel caso in cui questo avvenisse per almeno uno dei parametri, con l'attribuzione della fibra in esame alla classe complementare.
2. Si è definito un classificatore di tipo bayesiano. Per ogni parametro  $p$  con valore misurato  $\bar{x}$  siano  $f_{p,L}(x)$  e  $f_{p,C}(x)$  le relative distribuzioni gaussiane rispettivamente attribuite alla lana e al cashmere. Si definiscono:

$$L_{p,\bar{x}} := \int_{-\infty}^{\bar{x}} f_{p,C}(x) dx \quad \text{e} \quad C_{p,\bar{x}} := \int_{\bar{x}}^{+\infty} f_{p,L}(x) dx \quad \Rightarrow \quad v_{p,\bar{x}} := L_{p,\bar{x}} - C_{p,\bar{x}}.$$

Il numero  $v_{p,\bar{x}}$  dovrebbe tendere a  $-1$  per fibre con marcate caratteristiche cashmere ed a  $+1$  per fibre con marcate caratteristiche lana.

3. Si definisce

$$V := \sum_{i=1}^N w_i v_{p_i, \bar{x}_i},$$

dove  $N$  è il numero di parametri impiegati e  $w_i$  sono degli opportuni pesi non meglio specificati. La classificazione risulta quindi:

$$V \begin{cases} > +0.07 & \text{fibra di lana,} \\ \leq +0.07 \text{ e } \geq -0.03 & \text{caso dubbio,} \\ < -0.03 & \text{fibra di cashmere.} \end{cases}$$

## 2.5 Osservazioni e conclusioni

- Le informazioni sulla fase di preelaborazione dell'immagine sono sostanzialmente nulle. Si ha la sensazione che questa abbia occupato una parte minima del lavoro complessivo.
- Analoghe considerazioni valgono per l'estrazione delle misure. Queste sono poche e ottenute con metodi non robusti.
- Il lavoro si è concentrato in maniera eccessiva sulla fase di elaborazione statistica dei dati. Non riteniamo questa una scelta condivisibile. Benchè importante, è difficile infatti effettuare una buona statistica se i dati di partenza sono poco affidabili.
- Come precedentemente accennato la preelaborazione statistica dei dati è sicuramente importante e dovrà essere effettuata anche nel nostro futuro lavoro. Anche in questo caso possiamo però notare che nella ricerca in esame essa sembra essere stata effettuata in maniera complessivamente arbitraria senza una chiara logica di fondo.

- La fase effettiva di classificazione segue un approccio statistico differente da ciò che noi utilizzeremo. Anche per questa fase si può dare un commento finale analogo a quello del punto precedente.
- Dal punto di vista metodologico il lavoro presenta alcune lacune che noi dovremo evitare. In particolare:
  - la documentazione fornita in generale non é completa, soprattutto per quanto riguarda gli aspetti tecnici, é a volte inutilmente ricca di introduzioni teoriche e di scorrelate analisi dei dati, non sono chiari gli aspetti essenziali del lavoro ed in alcuni passaggi é contraddittoria;
  - in generale é poco chiara la distinzione tra la fase di definizione del classificatore e la fase di validazione dello stesso;
  - é sostanzialmente assente una trattazione critica degli errori e dei limiti della procedura di classificazione proposta, in relazione anche ai probabili problemi legati alle diverse valutazioni di qualità fornite da differenti esperti umani oppure dallo stesso esperto in tempi diversi.

### 3 Elaborazione delle immagini

L'elaborazione delle immagini digitali acquisite attraverso microscopio elettronico costituisce la prima fase del processo di classificazione delle fibre. Essa ha lo scopo di definire e misurare sulle immagini tutte quelle caratteristiche delle fibre che abbiano la possibilità di essere correlate alle diverse tipologie delle stesse. Dall'analisi statistica di queste misure saranno poi in seguito estratti i veri e propri indicatori da utilizzare nell'algoritmo di classificazione.

Questa fase del lavoro é stato svolta con la consulenza degli esperti del laboratorio *Sound and Image Processing Group* del dipartimento di Elettronica ed Informazione del Politecnico di Milano. Gli algoritmi sono stati sviluppati in ambiente MATLAB, cercando costantemente di utilizzare tecniche il più possibile note in letteratura e di comprovata affidabilità. Essi sono stati verificati su tutte le immagini forniteci, con risultati paragonabili a quelli qui illustrati.

#### 3.1 Operazioni di preelaborazione

Le immagini in arrivo dal processo di acquisizione necessitano in primo luogo di essere preelaborate, al fine di ottenere dati in ingresso il più possibile standardizzati e liberi da errori.

##### 3.1.1 Segmentazione della fibra dallo sfondo

Le singole immagini forniteci dal sistema automatico contengono sempre una fibra principale isolata più eventuali segmenti di altre fibre.

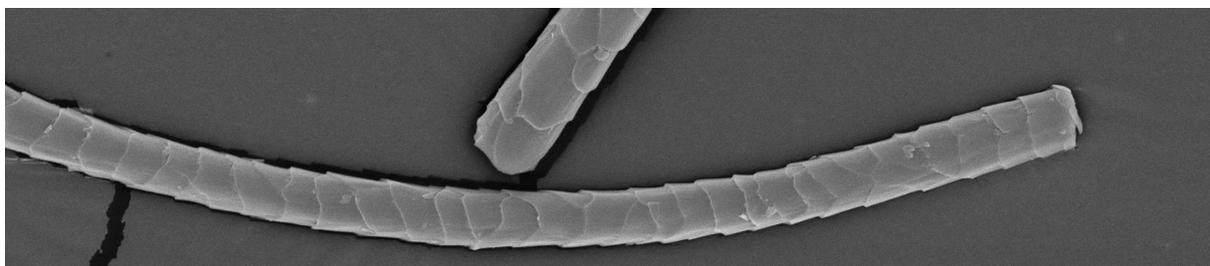


Figura 1: Immagine originale acquisita dal microscopio elettronico.

La prima operazione di preelaborazione consiste nella segmentazione della fibra principale dal resto dell'immagine, ovvero l'individuazione nell'immagine della regione occupata dalla fibra principale.

Nelle immagini a nostra disposizione si possono individuare qualitativamente quattro regioni distinte, caratterizzate da altrettanti differenti toni di grigio:

1. una regione quasi nera che circonda la fibra, probabilmente esistente a causa dalla rottura della pellicola adesiva metallica;
2. la regione uniforme dello sfondo di colore grigio scuro;
3. la regione interna alle scaglie di colore grigio chiaro;
4. i bordi della fibra ed i bordi interni delle scaglie di colore bianco.

Si é deciso di individuare la fibra come l'unione delle regioni 3 e 4. Illustriamo di seguito i passaggi della procedura di segmentazione da noi definita, applicando la stessa all'immagine di figura 1.

1. Utilizzando il metodo di Otsu generalizzato [2, 3] si trovano i valori di soglia tra le diverse intensità di grigio precedentemente elencate e si individuano le corrispondenti regioni all'interno dell'immagine.

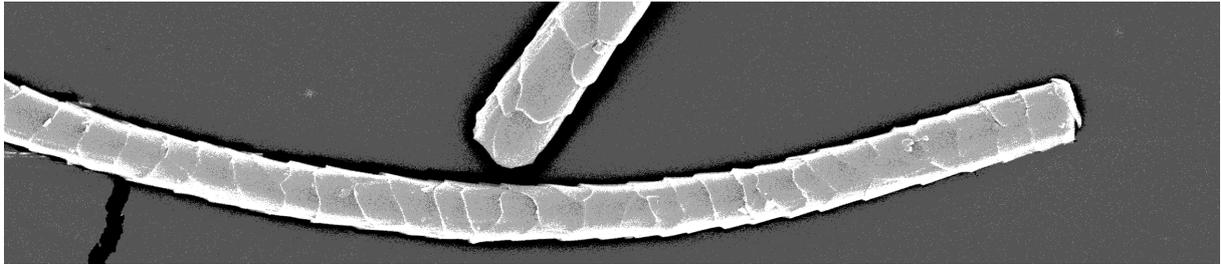


Figura 2: Le quattro regioni dell'immagine ottenute attraverso il metodo di Otsu.

2. Si definisce la regione "grezza" occupata dalla fibra come l'unione delle regioni 3 e 4.

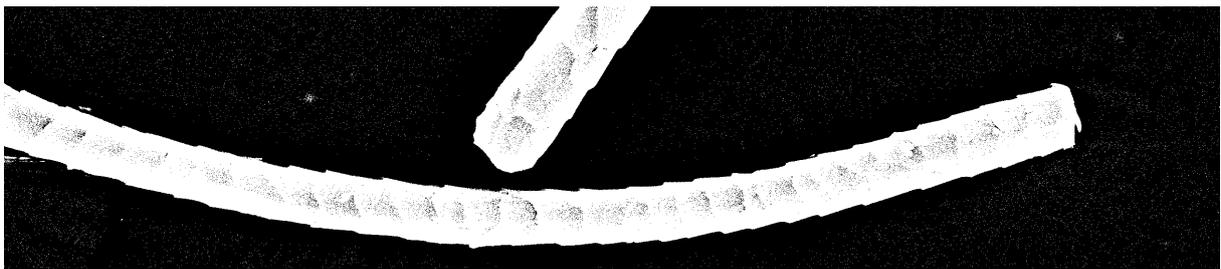


Figura 3: I pixel bianchi costituiscono l'unione delle regioni 3 e 4.

3. Utilizzando operazioni morfologiche (vedi ad esempio [4]) si individua la fibra principale, si eliminano i pixel bianchi isolati esterni alla stessa, si riempiono i buchi interni, si regolarizzano i bordi ed infine si effettua un ritaglio. L'immagine in bianco e nero ottenuta definisce una maschera che individua la regione occupata dalla fibra.



Figura 4: La maschera ritagliata in bianco e nero della fibra.

4. Sovrapponendo infine la maschera all'immagine originale in scala di grigi si ottiene l'immagine della fibra su sfondo nero.

Come si può osservare nell'immagine di figura 6, i bordi individuati sono una buona approssimazione dei bordi reali della fibra.

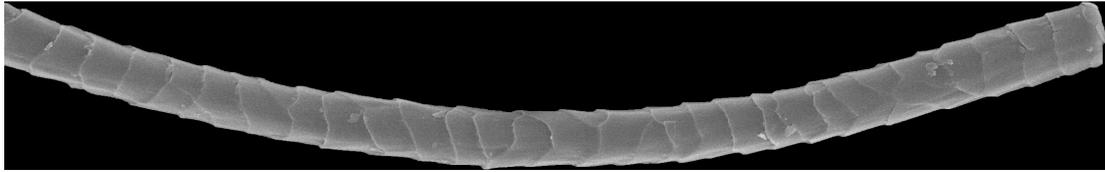


Figura 5: La fibra principale su sfondo nero.

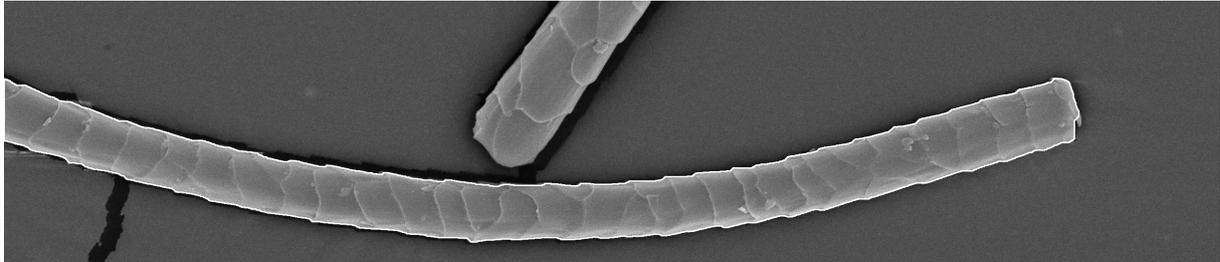


Figura 6: Il perimetro individuato della fibra principale sovrapposto all'immagine originaria.

### 3.1.2 Individuazione dell'asse della fibra e taglio delle estremità

Come è possibile osservare nell'esempio di figura 1, le immagini presentano due differenti problemi nei tratti iniziali e finali delle fibre:

- una fibra non interamente contenuta nell'immagine risulta tagliata in maniera casuale;
- una fibra interamente contenuta nell'immagine, a causa dell'operazione meccanica di taglio, presenta bordi con caratteristiche differenti dal resto della fibra stessa.

Per eliminare questi effetti si è definita una procedura automatica di taglio delle parti terminali delle fibre. Illustriamo in dettaglio la stessa sull'immagine 1.

1. Utilizzando l'algoritmo di scheletrizzazione di [5] applicato alla maschera in bianco e nero della fibra si ottiene l'asse della fibra. Questo è definito come il luogo dei centri delle circonferenze tangenti in almeno due punti ai bordi dell'immagine (e non contenute in altre circonferenze).

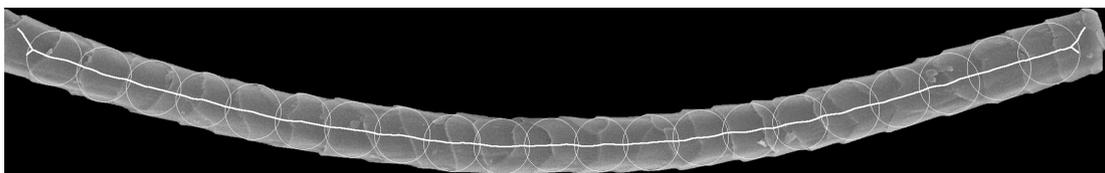


Figura 7: L'asse della fibra come luogo delle circonferenze inscritte.

2. Come si può osservare, in prossimità degli estremi della fibra l'asse presenta una biforcazione. Si è scelto di tagliare la fibra in questo punto in direzione perpendicolare all'asse. Nell'immagine si può osservare il risultato finale dell'operazione di taglio.

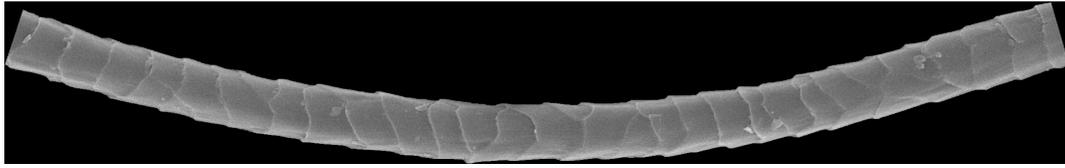


Figura 8: La fibra tagliata perpendicolarmente all'asse nei punti di biforcazione.

### 3.1.3 Filtraggio dell'immagine

Il processo di acquisizioni delle immagini é sempre inevitabilmente soggetto ad errori, pertanto le immagini risultano degradate dal rumore. Questo significa che anche nelle regioni in cui é ragionevole supporre un tono di grigio uniforme (come ad esempio all'interno delle zone lisce delle scaglie) si hanno comunque delle variazioni casuali attorno al valore medio di grigio. Per migliorare la successiva estrazione dei dettagli interni alla fibra é necessario ridurre il rumore attraverso operazioni di filtraggio. Il particolare filtro da utilizzare dipende dalle operazioni da effettuare successivamente sull'immagine. Per ricostruire i bordi interni delle scaglie é necessario:

- ridurre il rumore nelle regioni uniformi;
- mantenere e possibilmente enfatizzare le regioni a forte contrasto caratterizzanti i bordi delle scaglie.

Il filtro ottimo per tali fini é il filtro adattivo di Wiener bidimensionale [6]. Il suo funzionamento prevede di lasciare inalterata l'immagine nelle regioni in cui la varianza del tono di grigio é molto maggiore della varianza del rumore, mentre applica un filtro medio dove la varianza dell'immagine é paragonabile a quella del rumore. Naturalmente questa procedura richiede una stima statistica del rumore, che abbiamo ottenuto analizzando lo sfondo grigio esterno alla fibra.

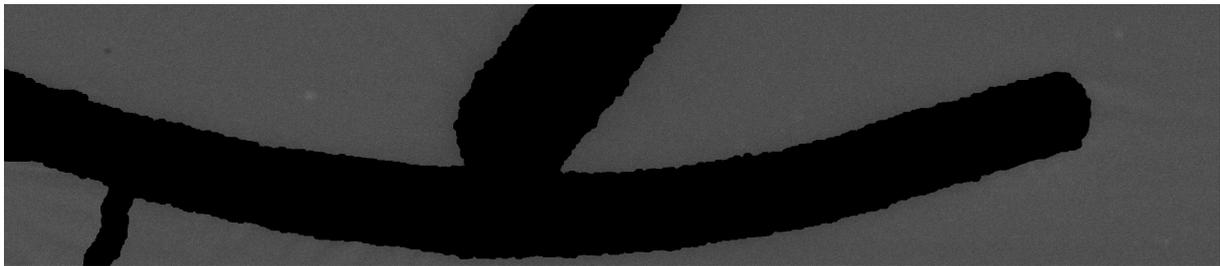


Figura 9: Lo sfondo grigio dell'immagine 1.

Riteniamo ragionevole supporre che lo sfondo sia intrinsecamente uniforme (almeno localmente), pertanto la varianza in questa regione dell'immagine é esclusivamente dovuta agli errori del processo di acquisizione e può fornire una buona stima della varianza del rumore.

Presentiamo l'immagine finale ottenuta dopo il filtraggio ed il confronto di un medesimo dettaglio prima e dopo la procedura.

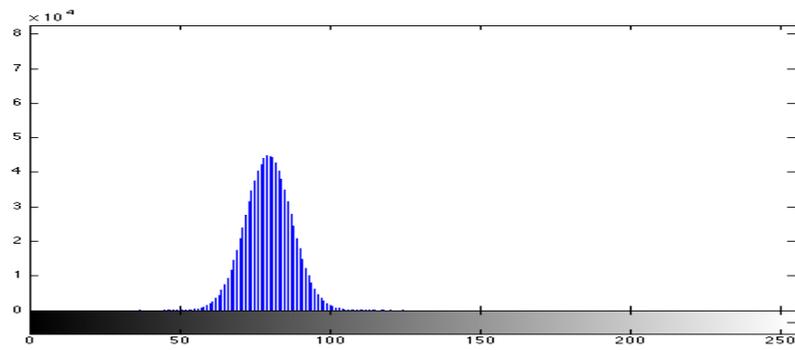


Figura 10: Istogramma dei toni di grigio dello sfondo.

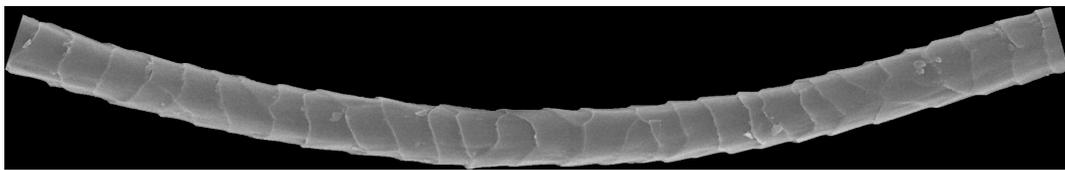


Figura 11: Immagine filtrata della fibra.

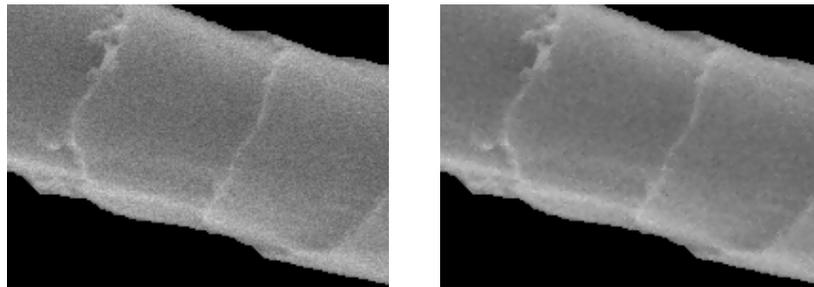


Figura 12: Confronto sullo stesso dettaglio dell'immagine prima e dopo l'applicazione del filtro.

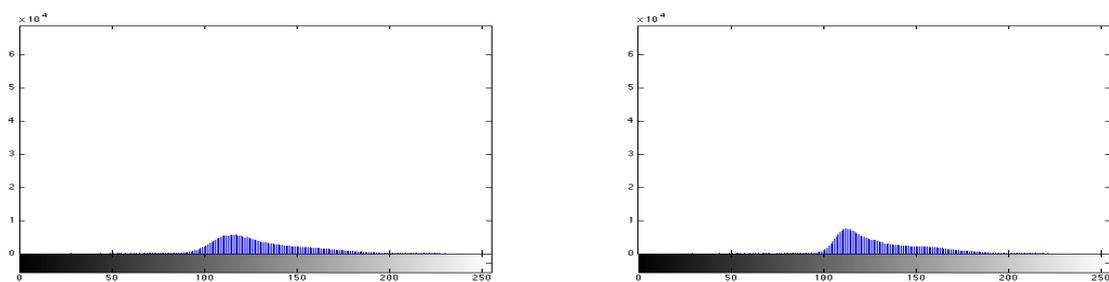


Figura 13: Confronto degli istogrammi dell'immagine prima e dopo l'applicazione del filtro.

## 3.2 Costruzione e misura di parametri significativi delle immagini

### 3.2.1 Larghezza della fibra e differenza tra bordo reale e regolarizzato

Come spiegato nella sezione 3.1.2, lo scheletro della fibra é il luogo dei centri delle circonferenze interne alla fibra e tangenti al bordo della stessa in almeno due punti. Come già ipotizzato ed analizzato in altri contesti (vedi ad esempio [7]), il diametro di tali circonferenze fornisce una

valida misura della larghezza della fibra. L'algoritmo di scheletrizzazione fornisce il diametro delle circonferenze per ogni pixel lungo l'asse.

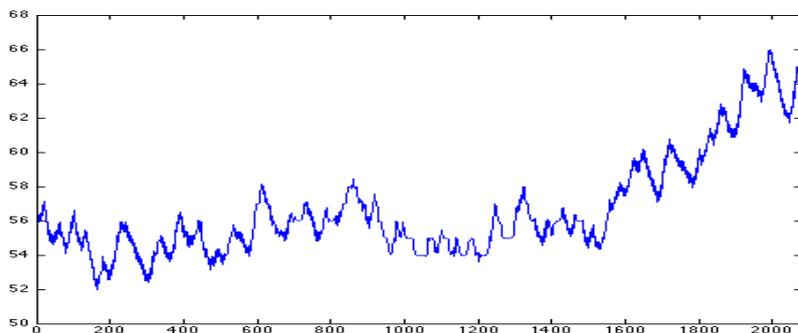


Figura 14: Diametro in pixel della fibra al variare della posizione in pixel lungo l'asse.

Nella figura successiva appaiono sovrapposti in un dettaglio il bordo vero e quello ricostruito della fibra.



Figura 15: La linea grigia scura rappresenta il perimetro reale, quella chiara il perimetro regolarizzato ed i tratti bianchi le regioni di sovrapposizione dei due.

Come si può osservare, il diametro così definito è una misura regolarizzata. Esso è meno dipendente dalle scaglie e da eventuale sporcizia presente sul bordo della fibra.

### 3.2.2 Profili di scaglia

La ricostruzione dei profili interni delle scaglie è uno degli aspetti più delicati della fase di elaborazione delle immagini. A seguito di numerosi esperimenti eseguiti sulle immagini a disposizione si è giudicato come migliore approccio al problema le tecniche di tipo watershed. Illustriamo la metodologia sviluppata in un esempio.

1. Viene calcolato il campo gradiente dell'immagine. Il gradiente è massimo dove è più grande la variazione nei toni di grigio, ovvero in presenza dei bordi delle scaglie.

Gli algoritmi di watershed permettono di trovare le curve chiuse corrispondenti ai massimi locali del gradiente. Non è però possibile applicare direttamente tali algoritmi sul

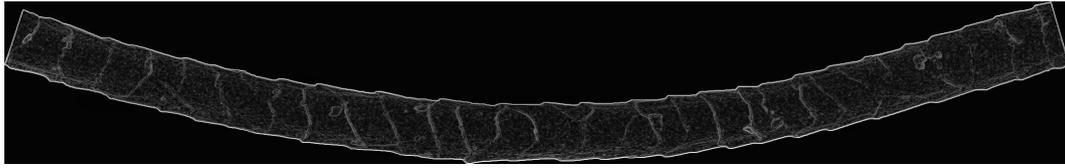


Figura 16: Campo gradiente dell'immagine filtrata. L'intensità di toni chiari è direttamente proporzionale al valore del modulo del gradiente.

campo gradiente di figura 16, poichè ciò comporterebbe sovrasedgmentazione a causa della presenza di troppi massimi e minimi locali legati al rumore. È quindi preliminarimente necessario modificare il gradiente in modo da mantenere solo i massimi e i minimi realmente significativi.

2. L'algoritmo di edge detection di Canny individua approssimativamente e riporta in un'immagine in bianco e nero le regioni di massimo gradiente corrispondenti ai bordi delle scaglie.

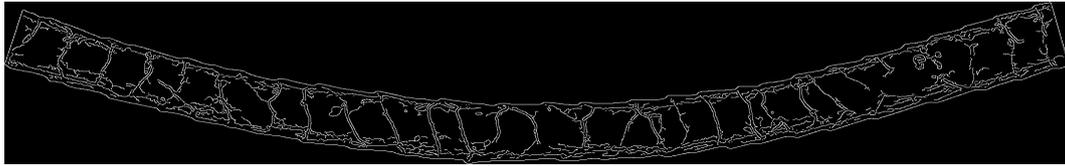


Figura 17: Bordi delle scaglie individuati dall'algoritmo di Canny.

Attraverso operazioni morfologiche dilatiamo tali bordi e calcoliamo le regioni ad essi complementari più significative. Nel caso ideale, ognuna di tali regioni rappresenta un'area connessa contenuta all'interno di una singola scaglia (oppure all'interno dello sfondo esterno).



Figura 18: Ogni regione bianca definisce l'interno di una singola scaglia.

Utilizzando routine di Matlab è ora possibile modificare il gradiente in modo tale che questo presenti minimi locali esclusivamente in queste regioni.

3. Possiamo infine applicare l'algoritmo di watershed.

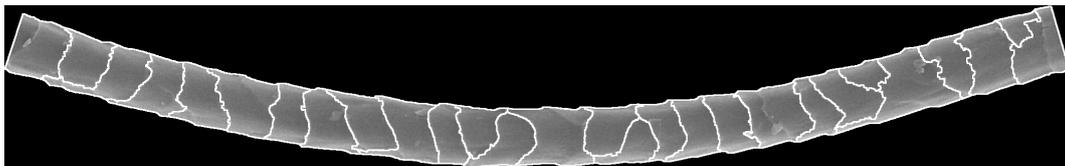


Figura 19: Le scaglie individuate e sovrapposte all'immagine di partenza.

Come si può osservare la procedura definita individua in maniera corretta la maggior parte dei profili. Naturalmente con immagini aventi bordi interni meno definiti il risultato é meno preciso, ma si ha comunque una parziale ricostruzione degli stessi.

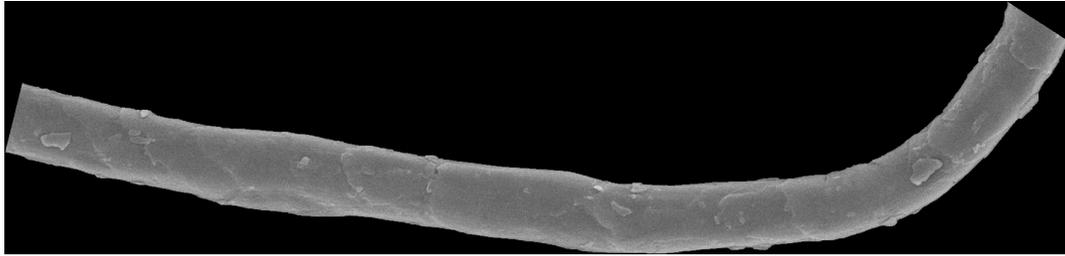


Figura 20: Immagine già ritagliata di una fibra avente i bordi delle scaglie interne meno definiti.

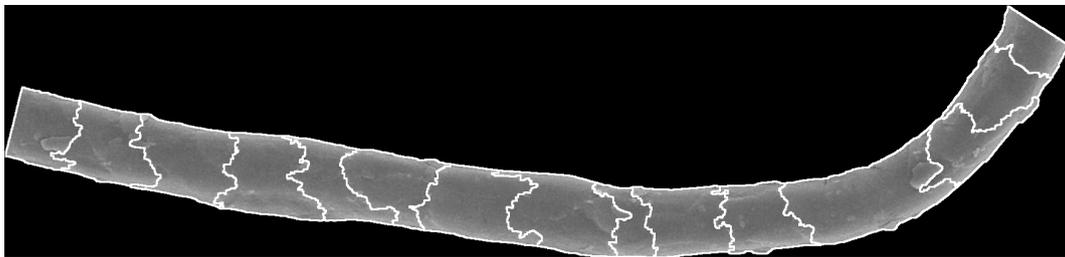


Figura 21: La ricostruzione dei profili delle scaglie.

## 4 Passi successivi...

Nel breve periodo si prevede di:

- completare la calibrazione dei parametri di acquisizione in modo da iniziare l'acquisizione automatica delle immagini;
- terminare la fase di elaborazione e misura delle immagini.

In contemporanea si procederà con:

- l'analisi statistica dei dati misurati. Sarà qui necessaria una fase preliminare di approfondimento della letteratura e di studio delle tecniche già utilizzate in problemi simili;
- la scelta e l'implementazione dell'algoritmo di classificazione.....

### 4.1 Completamento della fase di elaborazione delle immagini

La fase di elaborazione delle immagini si conclude con l'estrazione delle seguenti misure:

- Larghezza della fibra: questa misura è già stata definita ed implementata.
- Punti irregolari dei bordi: l'algoritmo di scheletrizzazione produce dei rami secondari dell'asse in corrispondenza dei punti meno regolari dei bordi della fibra. Questi vengono preliminarmente eliminati prima di eseguire le operazioni di taglio delle estremità illustrate nella sezione 3.1.2. Sarà valutato se ed in che modo la loro presenza possa invece fornire un ulteriore indicatore per il processo di classificazione.

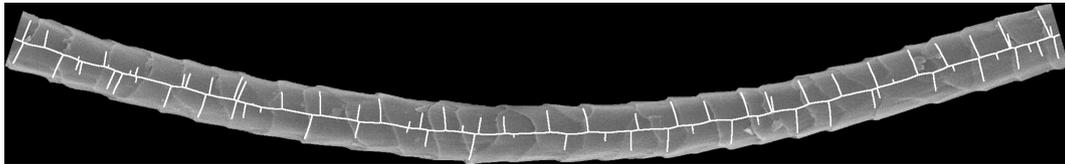


Figura 22: Lo scheletro della fibra con i rami secondari.

- Distribuzione delle scaglie: avendo ottenuto i profili delle scaglie all'interno della fibra, sarà possibile utilizzare sulle immagini indicizzate gli algoritmi standard di analisi di oggetti di MATLAB (Blob Analysis block), per ottenere informazioni quantitative sulla forma e sulla distribuzione delle scaglie all'interno della fibra. Ad esempio è possibile ottenere l'area, il perimetro, il baricentro o i momenti di inerzia di ogni singola scaglia. Si renderà qui necessario effettuare l'analisi statistica per valutare quali tra questi siano i migliori indicatori da tenere in considerazione (vedi sezione 4.2).
- Spessore delle scaglie: per misurare il bordo delle scaglie si procederà analizzando direttamente le immagini ottenute dall'applicazione dell'algoritmo di Canny (vedi figura 17). Dopo avere eliminato le linee prossime ai bordi della fibra è possibile concentrarsi sullo studio delle scaglie nella regione interna, che risulta influenzata in misura minore dalle conseguenze della non uniforme luminosità. Un metodo promettente di indagine da sperimentare sarà l'analisi dello spettro della trasformata di Fourier, in quanto è ragionevole

aspettarsi che la posizione del picco delle alte frequenze sia direttamente correlato allo spessore delle scaglie.

- Analisi della tessitura delle scaglie: utilizzando gli algoritmi di texture analysis già presenti in Matlab sarà possibile quantificare rugosità ed avvallamenti locali presenti all'interno di ogni singola scaglia.

## **4.2 Analisi statistica dei dati**

Questa fase del processo di classificazione è importante al fine di identificare gli indicatori più significativi nel distinguere tra le due classi di fibre, sui quali poi si baserà la scelta del classificatore automatico. Questo lavoro potrà essere effettuato quando saranno messe a disposizione un numero elevato di immagini acquisite dal microscopio elettronico.

Pur essendo ancora da definire l'esatta metodologia che verrà poi utilizzata, riteniamo importante seguire come principio ispiratore il cercare di ridurre il più possibile le arbitrarietà nella scelta degli indicatori. Questo è sempre consigliabile in generale nella statistica, ma è essenziale nel nostro problema dove non sono sempre consciamente ed esplicitamente formalizzabili le regole stesse di classificazione adottate dall'esperto umano. Prevediamo quindi di utilizzare, eventualmente adattandole, tecniche note e consolidate come l'analisi delle componenti principali, possibilmente da compiersi direttamente sui dati misurati.

## **4.3 Algoritmo di classificazione**

### **4.3.1 Rete neurale?**

### **4.3.2 AdaBoost?**

### **4.3.3 Autofibra?**

## Riferimenti bibliografici

- [1] Giovanni Frosali e altri,  
*“Determinazione dei parametri per il riconoscimento automatico di fibre cheratiniche”*,  
relazioni ad IMAX s.r.l. del 14 ottobre 2004, del 19 maggio 2005 e finale.
- [2] Nobuyuki Otsu (1979),  
*“A threshold selection method from gray-level histograms”*,  
IEEE Trans. Sys., Man., Cyber. 9 (1): 62–66.
- [3] Ping-Sung Liao and Tse-Sheng Chen and Pau-Choo Chung (2001),  
*“A Fast Algorithm for Multilevel Thresholding”*,  
J. Inf. Sci. Eng. 17 (5): 713–727.
- [4] Gonzalez, R. C. and Woods, R. E. (2006),  
*“Digital Image Processing”*,  
Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 3rd ed.
- [5] Wim H. Hesselink and Jos B. T. M. Roerdink (2008),  
*“Euclidean skeletons of digital image and volume data in linear time by the integer medial axis transform”*,  
IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intell. 30 (12): 2204-2217.
- [6] Lim, Jae S. (1990),  
*“Two-Dimensional Signal and Image Processing”*,  
Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice Hall, p. 548, equations 9.44 – 9.46.
- [7] Sangalli, L.M., Secchi, P., Vantini, S. and Veneziani, A. (2009),  
*“A Case Study in Exploratory Functional Data Analysis: Geometrical Features of the Internal Carotid Artery”*,  
Journal of the American Statistical Association, Vol. 104, No. 485, 37-48.